

УДК 517.9

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕХ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гуц С. В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Полынцева С. В.

Сибирский федеральный университет

В работе исследуется однозначная разрешимость в классе гладких ограниченных функций задачи определения двух старших коэффициентов и функции источника в многомерном параболическом уравнении с условиями переопределения, заданными на различных гиперповерхностях.

Данная задача относится к классу коэффициентных обратных задач. Коэффициентные обратные задачи – это задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов по некоторой информации о решении. Такие задачи исследовались: Ю.Е. Аниконовым[1], Ю.Я. Беловым[2], Г.В. Демидовым[3], М.М. Лаврентьевым[4] и другими.

Случай многомерного параболического уравнения с тремя различными коэффициентами, где решения рассматривались в классе гладких функций, достаточно быстро убывающих по выделенной переменной исследован в [5].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x(u) + g_1(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g_2(t, x) \frac{\partial u}{\partial z} + g_3(t, x)u + g_4(t, x)f(t, x, z) \quad (1)$$

с тремя неизвестными коэффициентами $g_1(t, x)$, $g_2(t, x)$, $g_4(t, x)$ с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \quad (x, z) \in E_{n+1}. \quad (2)$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

функции $f(t, x, z)$, $u_0(x, z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_{n+1} соответственно, коэффициенты $\alpha_{ij}(t), \alpha_i(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, – непрерывные действительнoзначные функции переменной t , $0 \leq t \leq T, T > 0, T = const$, $g_3(t, x)$ – непрерывно-дифференцируемая действительнoзначная функция переменных t, x .

Будем считать, что $\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ji}(t)$ и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t) \xi_i \xi_j > 0, \quad \forall \xi \in E_n \setminus \{0\} \quad t \in [0, T].$$

Предполагается, что выполняются условия переопределения на трех различных гиперповерхностях:

$$\begin{aligned} u(t, x, a_1(t)) &= \varphi_1(t, x), & (t, x) &\in \Pi_{[0,T]}, \\ u(t, x, a_2(t)) &= \varphi_2(t, x), & (t, x) &\in \Pi_{[0,T]}, \\ u(t, x, a_3(t)) &= \varphi_3(t, x), & (t, x) &\in \Pi_{[0,T]}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t) \in C^1[0,T]$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ - попарно различны, $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$, $\varphi_3(t,x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\begin{aligned}\varphi_1(0,x) &= u_0(x, a_1(0)), \quad x \in E_n, \\ \varphi_2(0,x) &= u_0(x, a_2(0)), \quad x \in E_n, \\ \varphi_3(0,x) &= u_0(x, a_3(0)), \quad x \in E_n.\end{aligned}\quad (4)$$

Под решением обратной задачи (1)-(3) в полосе $G_{[0,t_*]} 0 < t_* \leq T$, понимается четверка функций $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)-(3).

Входные данные достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им

$$\begin{aligned}|a'_s(t)| + |D_x^\gamma \psi_s(t,x)| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma u_0(t,z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma f(t,x,z) \right| \leq C, \quad |\gamma| \leq 4, \quad s=1,2,3, \\ k = \overline{0, 10-2|\gamma|}.\end{aligned}\quad (5)$$

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}|\psi_{st}(t,x)| + |f_t(t,x, a_1(t))| + |f_t(t,x, a_2(t))| + \\ + |f_t(t,x, a_3(t))| + |a_1''(t)| + |a_2''(t)| + |a_3''(t)| \leq C, \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(0,x) = u_{zz}|_{z=a_1(0)} u_z|_{z=a_2(0)} f(0,x, a_3(0)) - u_{zz}|_{z=a_1(0)} u_z|_{z=a_3(0)} f(0,x, a_2(0)) - \\ - u_z|_{z=a_1(0)} u_{zz}|_{z=a_2(0)} f(0,x, a_3(0)) + u_z|_{z=a_1(0)} u_{zz}|_{z=a_3(0)} f(0,x, a_2(0)) + \\ + f(0,x, a_1(0)) u_{zz}|_{z=a_2(0)} u_z|_{z=a_3(0)} - f(0,x, a_1(0)) u_{zz}|_{z=a_3(0)} u_z|_{z=a_2(0)} \geq \delta > 0,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}B(0,x) = -P_0 u_z|_{z=a_2(0)} f(0,x, a_3(0)) + P_0 u_z|_{z=a_3(0)} f(0,x, a_2(0)) + u_z|_{z=a_1(0)} P_{20} f(0,x, a_3(0)) - \\ - u_z|_{z=a_1(0)} P_{30} f(0,x, a_2(0)) - f(0,x, a_1(0)) P_{20} u_z|_{z=a_3(0)} + f(0,x, a_1(0)) P_{30} u_z|_{z=a_2(0)} \geq \delta > 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где $P_i = L_x(\varphi_i(0,x)) + g_3(t,x)\varphi_i(0,x) - \varphi_{it}(0,x) + a'_i(0)u_z|_{z=a_i(0)}$, $i=1,2,3$, $\delta = const$.

На основании (5) - (8) доказано, что четверка функций $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$ принадлежит классу

$$\begin{aligned}Z(t_*) = \{g_1(t,x), g_2(t,x), g_4(t,x), u(t,x,z) | u \in C_{t,x,z}^{1,2,2}(G_{[0,t_*]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,4}(G_{[0,t_*]}); \\ g_1(t,x), g_2(t,x), g_4(t,x) \in C_{t,x}^{0,2}(\Pi_{[0,t_*]})\}\end{aligned}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{k=0}^4 \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z) \leq C, \quad \sum_{k=0}^2 \sum_{|\gamma| \leq 2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\gamma u(t,x,z) \right| \leq C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \quad (9)$$

$$\sum_{|\gamma| \leq 2} |D_x^\gamma g_1(t,x)| + \sum_{|\gamma| \leq 2} |D_x^\gamma g_2(t,x)| + \sum_{|\gamma| \leq 2} |D_x^\gamma g_4(t,x)| \leq C, \quad (t,x) \in G_{[0,t_*]}. \quad (10)$$

Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия (4), (5)-(8). Тогда существует единственное решение $u(t,x,z)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $g_4(t,x)$ задачи (1)-(3) в классе $Z(t_*)$, удовлетворяющее соотношениям (9), (10). Постоянная t_* , $0 < t_* \leq T$, зависит от постоянных C , δ из соотношений (5)-(8).

Список литературы

- [1] Аниконов, Ю. Е. Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения / Ю.Е. Аниконов, Б. А. Бубнов // ДАН СССР.-1988.-Т.298.-N4. – С.777-779.
- [2] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. – КрасГУ, 1999.-236с.
- [3] Демидов, Г. В. Метод слабой аппроксимации / Г.В. Демидов, Н.Н. Яненко. – Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989. – 100с.
- [4] Лаврентьев, М. М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев // ДАН СССР.- 1965.-Т.160.-N1. – С. 32 -35.
- [5] Полынцева, С.В. Задачи идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения / С.В. Полынцева // Неклассические уравнения математической физики: Труды международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"/ Под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2007. С.221-231.